半不変ベキ級数(複素解析と大域解析 : 微分方程式の視点から)

上野, 一男

数理解析研究所講究録
683巻 1989年 32-43

半不変ベキ級数

佐賀大・教養・数学　上野 一男
Saga Univ., Lib. Arts　Ka. Ueno

1. 森川寿著『不変式論』(紀伊国屋，1977)の第2章は，2元n次形式の不変式論の古典的な内容を，ベキ級数の場合へ拡張することを試ている。しかし，そこで扱われている半不変式はベキ級数ではなくて，多項式である(p.69，定義2.1)；GL(2)の単位元の近傍が作用する対象はベキ級数として設定してある(pp.70-72；以下引用はすべて最初に掲げた本から。)。私にはこれは何となく中途半端な感じがした。もちろんこの本の内容そのものは大変興味深いものだが，第2章の方向での考えをもう少し徹底させれば，半不変ベキ級数を定義し考察の対象とできる，ということを以下でスケッチする。

2. 最初に行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の作用を定義する。a, b, c, d がど

ういう元なのか，ということは当然問題になるが，ここではボンヤリと不定元（又は文字）と考えておく。以下現われる α，x，n etc. についてもさしあたって同様の扱いをする。

$$(1)\qquad (\alpha+x)^n \mapsto (\alpha(a+cx)+(b+dx))^n$$

で $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の文字 α に対する作用を定義する。つまり，(1) の $\mapsto$ の両側を x について展開して，同じベキのところを対応させる。ところで $(\alpha+x)^n$ を x について展開する時 2通りのやり方がある：

$$(2)\qquad (\alpha+x)^n = \alpha^n(1+\alpha^{-1}x)^n = \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i} \alpha^{n-i} x^i,$$

$$(3)\qquad (\alpha+x)^n = x^n(1+x^{-1}\alpha)^n = \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i} \alpha^i x^{n-i}.$$

同じことが (1) の $\mapsto$ の右側についてもいえる。例えば (3) に対応する展開は

$$\begin{aligned}(4)\qquad &(\alpha(a+cx)+(b+dx))^n \\ &= (x(c\alpha+d)+(a\alpha+b))^n \\ &= x^n(c\alpha+d)^n(1+x^{-1}(c\alpha+d)^{-1}(a\alpha+b))^n \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i} (c\alpha+d)^{n-i}(a\alpha+b)^i x^{n-i}.\end{aligned}$$

従って(1)は2つの作用を同時に表現していると考えられる：

$$(5)\qquad \alpha^{n-i} \mapsto (b+a\alpha)^{n-i}(d+c\alpha)^{i} \qquad (i\in\mathbb{N}),$$

$$(6)\qquad \alpha^{i} \mapsto (b+a\alpha)^{i}(d+c\alpha)^{n-i} \qquad (i\in\mathbb{N}).$$

(5)は x^i $(i\in\mathbb{N})$ に関して，(6)は x^{n-i} $(i\in\mathbb{N})$ に関して得られる。

3. (1)が行列の作用であると主張するためには，行列の積と両立すべきだが，それは次のように理解できる：

$$(1)\text{の}\mapsto\text{の右側} = (c\alpha+d)^n\left(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}+x\right)^n$$

$$\xmapsto{\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}} (c\alpha+d)^n\left(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}(a'+c'x)+(b'+d'x)\right)^n$$

$$=\left(\alpha\,(aa'+cb'+(ac'+cd')x)+(ba'+db'+(bc'+dd')x)\right)^n,$$

これは $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'a+b'c, & a'b+b'd \\ c'a+d'c, & c'b+d'd \end{pmatrix}$ が $(\alpha+x)^n$ に作用したものと同じである。

4. (1)と『不変式論』で定義されているGL(2)（の単位元の近傍）の作用との関連を説明する。まず α は umbral letter

として扱われる： $\alpha^{w-i} \mapsto \xi_{w-i}$, $\alpha^{i} \mapsto \xi_i$ $(i \in \mathbb{N})$ の対応により (5), (6) etc は $\{\xi_{w-i} \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{\xi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ の2組の可算個変数のベキ級数に対する作用に読みかえられる。例えば (5) の読みかえは

(7) $$\xi_{w-i} \mapsto \sum_{k=0}^{i} \sum_{j \in \mathbb{N}} \binom{i}{k} \binom{w-i}{j} \xi_{w-i+k-j}\, d^{i-k} b^{j} c^{k} a^{w-i-j}.$$

ここで ξ_{w-i} を $\xi^{(i)}$ と書き替えると，p.71 (2.8) になる。つまり第2章で扱われている作用は，(1) の表現している作用 (5), (6) のうち最初のものである。(1) の表式のあいまいさから生じるもう1つの作用 (6) をも同時に考える，というのがこのノートの主要なアイディアである。

5. $w = n$ (正整数) のときには (2) と (3) は全く同じになるので (5) と (6) も全く同じになる ($0 \leqq i \leqq n$)。それは第1章 p.4 (1.4) で与えられている ((7) と同様の意味で)。つまり私がここで述べていることは，$w = n$ (正整数) の場合には，古典的な半不変多項式の理論に戻る。以上のことから，第2章は第1章とこのノートとの中間にあると考えられる。

6. 半不変ベキ級数の定義をする前に，実例計算を1つ示す。

(8) $$\varphi(\xi) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i}(-1)^i \xi_{n-i}\xi_i$$

とおく。(8)は $\alpha^{n-i} \mapsto \xi_{n-i}$, $\beta^i \mapsto \xi_i$ (α,β は umbral letter) の対応の下で

(9) $$\sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i}(-1)^i \alpha^{n-i}\beta^i = (\alpha-\beta)^n$$

と表せる。(8) と (9) を合わせて次のように書く：

(10) $$\varphi(\xi) = U_{\alpha,\beta}((\alpha-\beta)^n).$$

(因に，(10) と同様の意味で $U_\alpha((\alpha+x)^n)$ を $\alpha^{n-i} \mapsto \xi_{n-i}$ の下で解釈すると $\sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i}\xi_{n-i}x^i$ となるが，これは ξ_{n-i} を $\xi^{(i)}$ とすれば 才2章で基礎におかれているベキ級数である (p. 67)。)

(10)に (1) で定義される $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の作用，即ち (5)，(6) を行ってみると：

$$(\alpha-\beta)^n \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i}(-1)^i (b+a\alpha)^{n-i}(d+c\alpha)^i \times$$
$$\times (b+a\beta)^i(d+c\beta)^{n-i}$$

$$= (b+a\alpha)^w (d+c\beta)^w \left(1 - \frac{(d+c\alpha)(b+a\beta)}{(b+a\alpha)(d+c\beta)}\right)^w$$

$$= \left((b+a\alpha)(d+c\beta) - (d+c\alpha)(b+a\beta)\right)^w$$

$$= (ad-bc)^w (\alpha-\beta)^w,$$

つまり

$$\varphi(\xi) \longmapsto \left(\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)^w \varphi(\xi)$$

となり，$\varphi(\xi)$ が (1) の作用の下で，重さ w の半不変ベキ級数，と呼ばれるべきであることがわかる。$w = n$（正整数）の場合には

$$\varphi(\xi) = U_{\alpha,\beta}\left((\alpha-\beta)^n\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \xi_{n-i}\, \xi_i$$

は，ξ_{n-i} を $\xi^{(i)}$ とすれば，第1章における基礎多項式から構成される n 次の半不変極 (p.22，定義 1.4) である。このことから，ベキ級数を対象とした半不変極の構成の仕方を想像できる。

7. ξ のそえ字のつけ方について注意しておく。6. までに何度か出て来たように，このノートでの ξ の下ツキそえ字と『不変式論』での ξ の上ツキそえ字とでは，番号のつけ

方が逆になっている。それは，ここでは umbral notation を優先させているため，x^i に $\xi_{w-i} = U_\alpha(\alpha^{w-i})$ を付ずいさせる方が自然だからである。そのため両者を比べるとき常におき替えをしなければならず，また monomial に関する重さの定義も異ってしまうが，本質的なことではない。

8. Cayley–Aronhold の微分作用素 (cf. p.2, p.68) を次のように定義する：

$$\mathscr{D} := \mathscr{D}_+ + \mathscr{D}_-,$$

$$\Delta := \Delta_+ + \Delta_-,$$

$$\mathscr{H} := \mathscr{H}_+ + \mathscr{H}_-,$$

$$\mathscr{D}_+ := \sum_{i\in\mathbb{N}} (w-i)\xi_{i+1}\frac{\partial}{\partial\xi_i},$$

$$\mathscr{D}_- := \sum_{i\in\mathbb{N}} i\,\xi_{w-i+1}\frac{\partial}{\partial\xi_{w-i}},$$

$$\Delta_+ := \sum_{i\in\mathbb{N}} i\,\xi_{i-1}\frac{\partial}{\partial\xi_i},$$

$$\Delta_- := \sum_{i\in\mathbb{N}} (w-i)\xi_{w-i-1}\frac{\partial}{\partial\xi_{w-i}},$$

$$\mathscr{H}_+ := \sum_{i\in\mathbb{N}} (2i-w)\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_i},$$

$$\mathcal{H}_- := \sum_{i \in \mathbb{N}} (w-2i)\xi_{w-i}\frac{\partial}{\partial \xi_{w-i}}.$$

$\mathcal{D}_+, \Delta_+, \mathcal{H}_+$ を plus-operator; $\mathcal{D}_-, \Delta_-, \mathcal{H}_-$ を minus-operator と呼ぶと, plus は minus と可換なことはすぐわかる。次の交換関係がなりたつ:

(11) $$[\mathcal{D}_+, \Delta_+] = \mathcal{H}_+, \quad [\mathcal{H}_+, \mathcal{D}_+] = 2\mathcal{D}_+,$$
$$[\mathcal{H}_+, \Delta_+] = -2\Delta_+,$$

及び (11) で $+$ を $-$ におき替えたもの。従って (11) で $+$ を省いた式もなりたつ。つまり $\mathfrak{sl}(2)$ の3つの表現が得られたといってよい。これは次のように説明できる: plus が作用するのは $\{\xi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ のベキ級数環上, minus が作用するのは $\{\xi_{w-i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ のベキ級数環上, その和 $(\mathcal{D}, \Delta, \mathcal{H})$ が作用するのは2つのベキ級数環の(位相環としての)テンソル積上と考えられ, (11)(及びそのおき替え)は, それぞれの環上での $\mathfrak{sl}(2)$ の表現を与える。それらを ρ_+, ρ_-, ρ と表すと, $\rho = \rho_+ \otimes \rho_-$ と書いてよい。

9. φ を ξ のベキ級数(上記のテンソル積の元)とする時, φ が半不変ベキ級数であるとは, $\mathcal{D}\varphi = 0$ のことと定義する。(cf. p.6, p.69) (8)がこの条件をみたすことは簡単に確

められる。

10. Δは umbral letter α に関して $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ として作用する：
$\alpha^i \mapsto i\alpha^{i-1}$, $\alpha^{w-i} \mapsto (w-i)\alpha^{w-i-1}$ $(i \in N)$.

11. 5.で述べた $w=n$（正整数）の場合に関する注意を，Cayley-Aronholdの作用素について述べ直すと：

$w=n$ のとき，$\mathcal{D}_+, \ldots, \mathcal{H}_-$ の6個の作用素はすべて $\{\xi_0, \ldots, \xi_n\}$ のベキ級数環上で閉じている。そしてその上での作用については $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_-$, $\Delta_+ = \Delta_-$, $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_-$ となり，（7.の注意を参照すれば）これらは，第1章p.3で定義されている $\mathcal{D}$, Δ, $\mathcal{H}$ と同じである。即ち，$\{\xi_0, \ldots, \xi_n\}$ のベキ級数環上での部分表現をとると，$\rho_+ = \rho_-$ となり，第1章で扱われているのはこの共通の部分表現である。

また，第2章で扱われている表現は，ξ_{w-i} を $\xi^{(i)}$ におき替えることにより，このノートにおける ρ_- である。5.で述べた注意は，8．及びこの節により具体的に理解される。

12. 以上でこのノートの考えの要点は尽される。この setting の下で第1章におけるいくつかの命題が，半不変ベキ級数の場

合に拡張されうることがわかる：p.8 補題1.3，p.9 補題1.4，p.10 補題1.5，p.11 定理1.1．但し，7.で述べたように重さなどの定義に若干の読み替えが必要である。ここで注意すべきことは，第2章における不変式等の重さは0又は正整数に限られるが，このノートの場合には一般(不定元)なものになる(6．参照)ことと，後者の場合，settingさえ整備されれば，上記の命題たちの拡張はむしろ直接的で，証明も易しいことである。詳しいことは省略する。

13.　2.で保留した，文字 a, b, c, d, α, x, etc. の扱いについてふれておく。実は12.までで述べて来た内容について(すべて成立すべきことだと考えられるが)どのように状況設定をすれば証明がスムーズに流れるかについて，私自身まだ確信がない。1つ実例を掲げて説明する。第1章の $GL(2)$ にかわる群として何を考えればよいか？ 第2章の内容をながめてみると，a, b, c, d 自身を(無限小を表示すると見なされる文字についての)ベキ級数と考えるのがよさそうに思える。例えば1変数 t に関するベキ級数環の極大イデアルを M_t で表すとき，

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, d \in 1 + M_t,\ b, c \in M_t \right\},$$

$1+M_t := \{1+f(t) \mid f(t) \in M_t\}$，とおくと G は（係数環は任意として）群になる。Gは単位元の近傍のなす群と見なされる。またpを文字（又は一般のベキ）としたとき，a^pとd^pは2項展開によりtのベキ級数として表示される。従って必要とされる大部分の計算はこのような方針で理くつをつけることができそうに思われるが，少し細く見ていくと，係数環（又は体）として何を設定するかが問題になるところが出てくるようである。このこと以外にもまだスッキリと設定のできない部分が残っている。

14. 才1章の内容の内，数え上げ組合せ論的な部分は，このノートの半不変ベキ級数について，直接的な拡張はできない。結局有限的（多項式）の範囲内で考える方が面白いのかもしれない。

15. 最後に，私自身は余りちゃんと読んでいないが，このノート又は『不変式論』と関連のありそうな文献を2つあげておく：

J. P. S. Kung and G.-C. Rota, The Invariant Theory of Binary Forms, Bulletin A.M.S., vol.10, no. 1 (1984) pp. 27-85;

P. J. Olver, Invariant Theory and Differential Equations, Spr. Lect. Notes 1278, pp. 62–80.

以上

(1989.1.03.)